TOPOLOGIA
WPPT I, sem. letni
EGZAMIN POPRAWKOWY

Wrocław, 28 czerwca 2010

ZADANIE 1. Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Udowodnij, że metryka d, jako funkcja $d : X \times X \to \mathbb{R}$ jest Lipschitzowska ze stałą 2, jeśli w produkcie $X \times X$ rozpatrujemy metrykę ,,maksimum", czyli $d_{\max}((x, y), (x'y')) = \max\{d(x, x'), d(y, y')\}$, a w $\mathbb{R}$ zwykłą metrykę ,,moduł różnicy".

ROZWIĄZANIE: Mamy wykazać oszacowanie

$$|d(x, y) - d(x', y')| \leq 2d_{\max}((x, y), (x'y')).$$

Z warunku trójkąta mamy:

$$d(x, y) \leq d(x, x') + d(x', y') + d(y', y) \quad \text{oraz} \quad d(x', y') \leq d(x', x) + d(x, y) + d(y, y').$$

czyli, przenosząc jedno wyrażenie na drugą stronę,

$$d(x, y) - d(x', y') \leq d(x, x') + d(y', y) \quad \text{oraz} \quad d(x', y') - d(x, y) \leq d(x', x) + d(y, y').$$

Pokazaliśmy, że

$$|d(x, y) - d(x', y')| \leq d(x, x') + d(y, y').$$

Ale oczywiście

$$d(x, x') + d(y, y') \leq 2 \max\{d(x, x'), d(y, y')\} = 2d_{\max}((x, y), (x'y')).$$

co daje żądaną nierówność.

NAJCZĘSTSZE BŁĘDY:

1. Niepoprawne zapisanie warunku Lipschitza.
2. Przyjęcie, że X to prosta rzeczywista.
3. Poprzestawianie x, x', y, y'.

ZADANIE 2. Udowodnij, że jeśli $\mathcal{F}$ jest zwartą (w metryce supremum) rodziną funkcji ciągłych $f : X \to Y$, gdzie X jest przestrzenią zwartą, a Y dowolną przestrzenią metryczną, to zbiór

$$Z = \bigcup_{f \in \mathcal{F}} f(X),$$

(czyli suma obrazów wszystkich funkcji z rodziny $\mathcal{F}$) jest zwarty w Y.
Wskazówka: Pokazuj ciągową zwartość.

ROZWIĄZANIE: Niech (y_n) będzie ciągiem punktów w Z. Mamy pokazać, że istnieje podciąg zbieżny. Każdy y_n jest obrazem jakiegoś punktu z X, nazwijmy go x_n, przez jakąś funkcję z rodziny $\mathcal{F}$, nazwijmy ją f_n. Czyli $y_n = f_n(x_n)$. Istnieje podciąg n_k taki, że x_{n_k} jest zbieżny do jakiegoś $x \in X$ (korzystamy ze zwartości X. Dalej, istnieje pod-podciąg n_{k_i} taki, że $f_{n_{k_i}}$ jest zbieżny w metryce supremum (czyli jednostajnie) do jakiejś $f \in \mathcal{F}$ (tu korzystamy ze zwartości $\mathcal{F}$). Ponieważ pod-podciąg $x_{n_{k_i}}$ też zbiega do x, możemy dla uproszczenia oznaczeń uznać, że mamy podciąg n_j taki, że jednocześnie x_{n_j} zbiega (po j) do x i f_{n_j} zbiega do f. Oczywiście punkt $y = f(x)$ z definicji należy do Z. Wystarczy teraz pokazać, że y_{n_j} zbiega do y. Ustalmy $\epsilon > 0$. Niech δ będzie taka, że $d_X(x, x') < \delta \implies d_Y(f(x), f(x')) < \frac{\epsilon}{2}$ (tu korzystamy z ciągłości funkcji f w punkcie x). Teraz znajdujemy j_0 tak duże, że dla wszystkich $j \geq j_0$ zachodzi jednocześnie

$$d_X(x_{n_j}, x) < \delta \qquad \text{oraz} \qquad d_{\sup}(f_{n_j}, f) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Wtedy, dla $j \geq j_0$ mamy:

$$\begin{aligned} d_Y(y_{n_j}, y) = d_Y(f_{n_j}(x_{n_j}), f(x)) &\leq \\ &\leq d_Y(f_{n_j}(x_{n_j}), f(x_{n_j})) + d_Y(f(x_{n_j}), f(x)) \leq \\ &\qquad\qquad \leq d_{\sup}(f_{n_j}, f) + \frac{\epsilon}{2} \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

NAJCZĘSTSZE BŁĘDY:

1. Rozpoczynanie dowodu od wybrania ciągu punktów w X – to kompletnie nic nie daje, bo mamy dowodzić zwartości Z.
2. Uznanie, że ciąg punktów z Z jest postaci $f(x_n)$ (z ustaloną funkcją f) albo postaci $f_n(x)$ (z ustalonym x). Żadana z tych wersji nie opisuje ogólego ciągu z Z.
3. Wszelkie argumenty z zastsosowaniem zupełności, ciągów podstawowych, itp.
4. Uważanie, że suma definiująca Z jest przeliczalna.
5. Najczęstszy błąd – stwierdzenie, że suma zbiorów zwartych jest zbiorem zwartym. (To jest kompletny nonsens: każdy zbiór jest sumą pojedynczych punktów, które są zwarte).

ZADANIE 3. Udowodnij, że w dowolnej przestrzeni metrycznej (X, d) każda kula otwarta $K(x, r)$ jest zbiorem typu F_σ. (Nie powołuj się na fakt z wykładu, że każdy zbiór otwarty jest typu F_σ, tylko udowodnij to ,,na piechotę" dla kuli.)

ROZWIĄZANIE: Wystraczy zauważyć, że

$$K(x, r) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{K}(x, r - \tfrac{1}{n}).$$

gdzie $\overline{K}(x, s)$ oznacza kulę domkniętą o promieniu s: $\overline{K}(x, s) = \{y : d(x, y) \leq s\}$. Inkluzja ,,$\supset$" jest oczywista, bo każda kula domknięta o promieniu mniejszym od r jest zawarta w kuli otwartej o promieniu r. Inkluzja ,,$\subset$": Niech $y \in K(x, r)$. Wtedy $d(x, y) < r$ i istnieje n takie, że $d(x, y) \leq r - \frac{1}{n}$. Zatem $y \in \overline{K}(x, r - \frac{1}{n})$. Ponieważ kule domknięte są zbiorami domkniętymi, więc przedstawiliśmy $K(x, r)$ jako sumę przeliczalną zbiorów domkniętych.

NAJCZĘSTSZE BŁĘDY:

1. Brak dowodu równości rozważanej kuli otwartej i zaproponowanej sumy zbiorów domkniętych.

2. Uważanie, że jak zbiór nie jest otwarty, to jest domknięty.

3. Karkołomne i błędne dowodzenie czegoś o dopełnieniu kuli.

4. Używanie do tego zadania Twierdzenia Baire'a (nie zakładmy zupełności).